УДК 94(47).05
DOI: 10.51255/2311-603X_2022_1_20

А. Г. Гуменюк

Методы землемерия в геометрической рукописи XVII в.

В отечественной историографии не изучен вопрос о том, какие вычислительные методики использовали писцы-межевщики при определении площади земельных участков в XVII в. По мнению Н. М. Карамзина, начало валовых описаний земель в России послужило поводом к сочинению первой российской геометрии, «книги глубокомудрой, — по выражению автора, — дающей легкий способ измерять места самые недоступные, плоскости, высоты и дебри, радиксом и циркулом». Н. М. Карамзин имел в своем распоряжении экземпляр, озаглавленный: «Книга, именуемая геометрия или землемерие радиксом и циркулем»[1].

В настоящее время выявлено три списка рукописи с таким названием. Два из них входят в состав сборников, хранящихся в Отделе рукописей Российской государственной библиотеки. Это сборник № 32 из собрания К. И. Невоструева и сборник № 682 из собрания В. М. Ундольского. Сборники начала XVIII в. включают арифметику, краткую редакцию книги сошного письма и руководство по геометрии и землемерию. В сборник К. И. Невоструева входит текст торговой книги, в сборнике В. М. Ундольского геометрический раздел не имеет чертежей, для которых оставлено место. Третий, наиболее полный список находится в Отделе рукописей Российской национальной библиотеки[2].

В конце XIX в. попытка рассмотрения геометрических задач рукописи была предпринята историком математики В. В. Бобыниным, изучался незаконченный список из собрания В. М. Ундольского. Исследователь отметил, что землемерие XVII в. было далеко от совершенства, из измерительных приборов у писцов была только мерная веревка. В остальных вопросах приходилось полагаться на глазомер. Исследование В. В. Бобынина не получило развития[3].

Краткий анализ рукописи представлен в работах К. И. Швецова и А. П. Юшкевича[4]. Авторы пришли к выводу, что землемеры XVII в. пользовались устаревшими приемами и не были заинтересованы в точности измерений.

Целью данной работы является исследование вычислительных методик, применявшихся в землемерии XVII в. на основе списка геометрической рукописи из собрания ОР РНБ[5]. Рукопись в 1^0, 55 л., текст писан скорописью конца XVII в., разделы сопровождаются чертежами. По листам имеется запись владельца: «Книга дьяка Андреяна Ратманова»[6]. Филиграни: первый и последний листы книги — «Герб города Амстердама» с литерами HD — типа Дианова № 139, 144 (1690–1695 гг.); тетради книги — «Голова шута» с литерами AJ — типа Дианова № 478 (1680 г.)[7].

Книга начинается с введения, в котором автор объясняет цель ее составления: «Землемерие, эллински геометрия мудрость к седми свободных мудростех <...> к постижению земные меры дана»[8]. Рукопись включает краткую редакцию книги сошного письма с главой «О земном верстании», задачи расчета расстояний до недоступных объектов, задачи вычисления площадей геометрических фигур, извлечение квадратных и кубических корней, задачи вычисления объема, примеры построения фигур при помощи циркуля.

Примеры вычисления площадей разных фигур

В главе «О земном верстании» собраны примеры вычисления площадей земельных участков простой геометрической формы. Аналогичные задачи входили в состав редакций книги сошного письма[9] и в руководство по арифметике, составленное в 1645 г.[10]

В первой задаче вычисляется площадь прямоугольного поля длиной $53^1/_3$ сажени и шириной 40 саженей (рис. 1).

Авторы при помощи мерной веревки выделяют квадрат 40×40 саженей и определяют его как «четверть сева», оставшийся участок является «третью четверти». С арифметической точки зрения решение не вызывает замечаний.

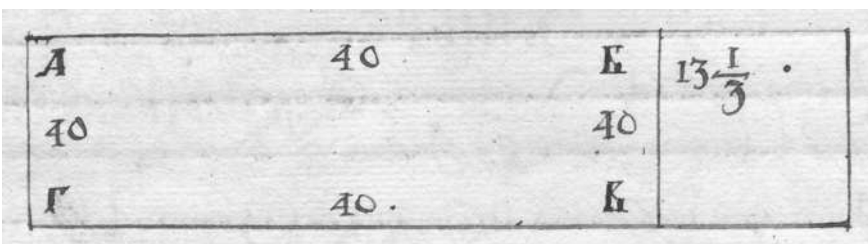

Рис. 1. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 30 об.

Следует обратить внимание на два момента. В приведенной задаче, так же как и в остальных задачах этого раздела, четвертью считается участок в 1600 саженей^2. Четверти такого размера редко встречаются в документах XVII в., в этот период размер казенной четверти составлял 1200 саженей^2. Задачи из раздела о земельном верстании более соответствуют концу XVI в. Кроме того, в тексте отсутствуют указания на измерение величины углов. Вопрос, в какой степени земельный участок на местности соответствует прямоугольнику, изображенному на чертеже, остается невыясненным.

В следующей задаче показан пример вычисления площади поля трапециевидной формы (рис. 2).

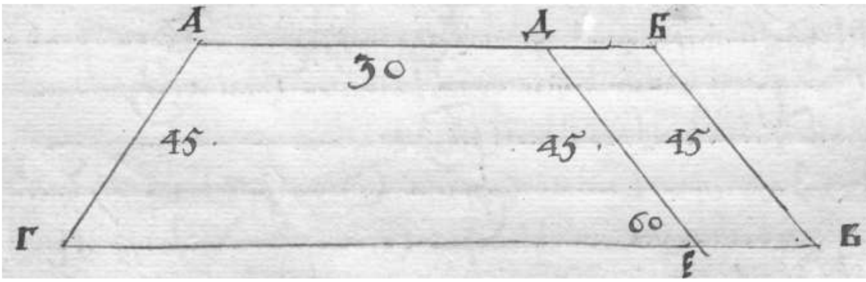

Рис. 2. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 30 об.

Авторы рукописи ошибочно полагали, что площадь фигуры можно вычислить, умножив полусумму оснований на длину боковой стороны фигуры, по аналогии с вычислением площади прямоугольника. В рукописи указано:

$$\frac{30+60}{2}\times 45 = 2475 \text{ саженей}^2.$$

Писец допустил арифметическую ошибку, выражение равняется 2025 саженей^2.

По формулам евклидовой геометрии площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, значит, для изображенной трапеции правильное значение площади равняется 1909,19 сажени^2.

На рис. 3 показана методика определения площади полей многоугольной формы. Такие фигуры авторы предлагают разбивать на трапеции и треугольники.

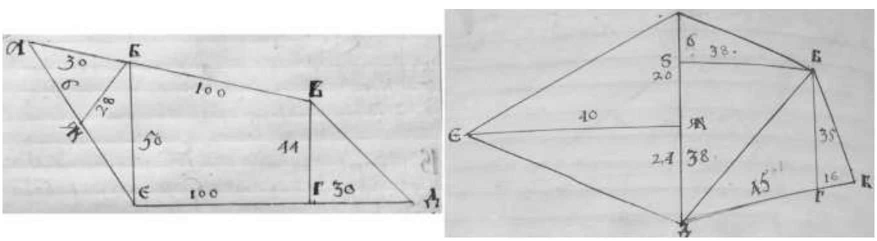

Рис. 3. Рисунки из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 31, 32 об.

Площади трапеций определяются по методике, изложенной выше. Для вычисления площадей треугольников производят измерение двух сторон, площадь рассчитывается как произведение половины длины меньшей стороны на длину большей стороны. Предложенная формула может быть верна, когда измененные стороны являются катетами прямоугольных треугольников, в остальных случаях вычисление приводит к значительным ошибкам.

На рис. 4 представлен рисунок из рукописи. Фигура, построенная в масштабе, позволяет оценить степень достоверности чертежа, выполненного писцом.

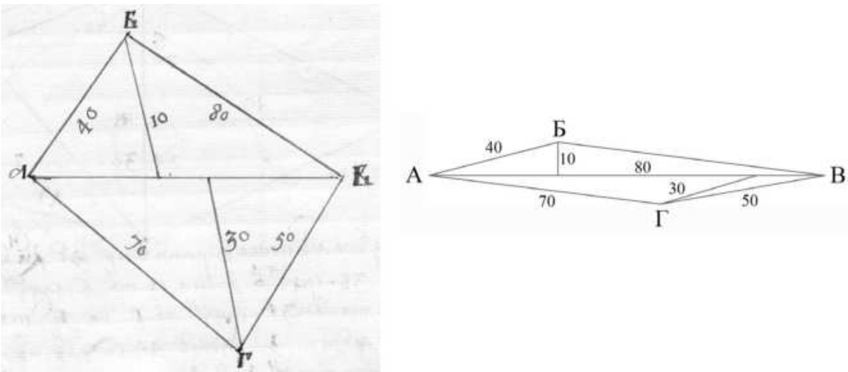

Рис. 4. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 32. Справа — чертеж земельного участка в масштабе

Для определения площади авторы разбили фигуру на треугольники и вычислили их площади как произведение половины меньшей стороны на длину большей стороны:

$$\frac{10}{2}\times 40+\frac{10}{2}\times 80+\frac{30}{2}\times 70+\frac{30}{2}\times 50=2400 \text{ саженей}^2.$$

Площадь фигуры, построенной в масштабе, существенно отличается от значения, рассчитанного писцом, и составляет 1103,14 сажени^2.

Раздел заканчивается задачей вычисления площади круглого поля с «четвероугольной поляной и болотцем посреди» (рис. 5).

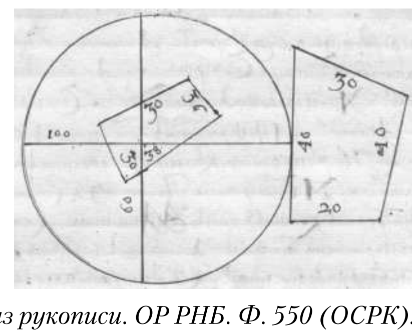

Рис. 5. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 33

Круг, показанный на рисунке, имеет длину 100 и ширину 60 саженей, по современной номенклатуре фигуру следует считать эллипсом. Для вычисления площади авторы умножают произведение длины фигуры на ширину и на 3/4. Площади четырехугольников определяются перемножением полусумм боковых сторон:

$$\frac{3\times100\times60}{4}-\left(\frac{30+36}{2}\times\frac{30+38}{2}\right)+\left(40\times\frac{30+20}{2}\right).$$

Сравнение первой части выражения с формулой площади эллипса показывает, что при решении было использовано значение $\pi=3$. Площадь эллипса: $\frac{\pi ab}{4}$, где a и b —длины большой и малой осей.

Рассмотрев приведенные выше задачи, следует отметить, что отсутствие сведений о величинах углов не позволяет говорить о том, что чертежи в книгах сошного письма достоверно воспроизводили форму земельных участков. Авторы книг сошного письма не были знакомы с правилами геометрии Евклида.

Задачи вычисления объема житниц и вместимости бочек

Этот тип задач заимствован из учебников арифметики XVII в.[11] Перед определением размера житницы авторы рекомендуют сделать «четвероугольную» меру с одинаковыми длиной, шириной и высотой. Размеры житницы измеряются бруском, равным стороне меры. Для наглядности на рисунке показана житница, длина, ширина и глубина которой составляют по 10 мер. Всего в таком «сусеке» будет 1000 мер (рис. 6).

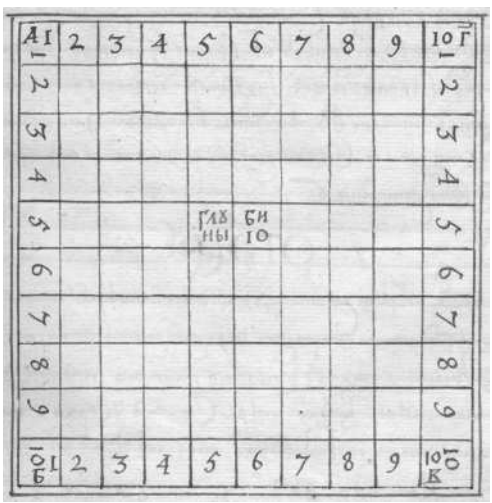

Рис. 6. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 13

На рис. 7 представлен пример вычисления объема круглой бочки с ровными стенками. Для вычисления площади круглого днища используются два способа. Авторы полагают, что фигуры, имеющие равный периметр, равны по площади. Так, для круглого днища с диаметром 7,5 периметр рассчитан по формуле: 3×7,5=22,5. Сравнивая выражение с формулой длины окружности — $P=\pi d$, отмечаем, что писец использует значение $\pi=3$. Далее площадь фигуры вычисляется как площадь квадрата со стороной, равной ¼ периметра:

$$\frac{22,5}{4}\times\frac{22,5}{4}=31,64.$$

Объем бочки получается после умножения площади основания на высоту. Нетрудно заметить, что расчет площади по формулам евклидовой геометрии дает другой результат:

$$S=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{3,14\times 7,5^2}{4}=44,16.$$

Методика вычисления площади окружности, предложенная в руководстве, приводит к ошибке в 39,5 %.

Второй способ, который предлагают авторы, — построение квадрата на чертеже. Фигура выглядит более достоверно, однако методика построения чертежа остается неясной. Скорее всего, фигура построена приблизительно.

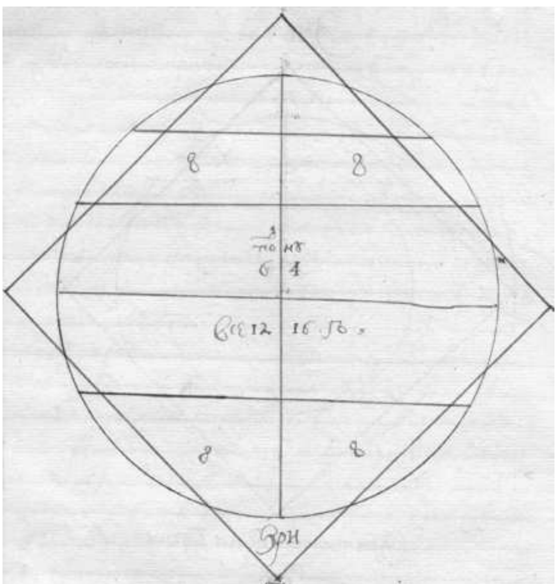

Рис. 7. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 18 об.

Практическое значение предложенной методики неочевидно. Опытный купец видел на глаз, что результат ошибочен. Вычисления можно было проверить, пересчитав количество ведер воды, необходимых для заполнения бочки[12].

Извлечение корней

Название рукописи содержит непонятную для современного читателя формулировку «деление радиксом». Термин происходит от греческого radiks — основание[13]. Под делением радиксом автор рукописи подразумевает извлечение корней. Раздел рукописи, посвященный задачам по извлечению квадратного корня, озаглавлен «Деление мер разных в четвероугольном сочинении». Для извлечения квадратных корней автор пользуется итерационным методом, который в современной вычислительной математике получил название метода Герона, наиболее известное описание этого метода было сделано Героном Александрийским в трактате «Метрика» (I в.). Термин «деление радиксом» (extraction radicis) использовал австрийский астроном Георг Пойербах (1423–1461) в трактате «Алгоризма»[14].

Методом извлечения квадратного корня решались несколько задач землемерия: вычисление стороны квадрата, содержащего заданное число квадратных саженей, определение площади земельного участка по его размерам с последующим вычислением стороны равновеликого квадрата, определение периметра земельного участка.

В качестве примера можно привести следующую задачу: «Стоит град, в длину его 40 верст, а поперек 8. Ино, что в нем будет четвероугольных верст, и что верст кругом такова места. Зри написано». Авторы понимают, что «град» имеет сложную многоугольную форму, при этом они полагают, что всякий многоугольник равновелик квадрату со стороной равной четверти его периметра. Предлагается следующее решение: площадь определяют как произведение длины фигуры на ширину 40×8=320 «верст четвероугольных». Затем, неточно извлекая квадратный корень, получают сторону квадрата $17\,^{31}/_{189}$ версты[15].

Отдельная глава руководства посвящена извлечению кубических корней. Текст озаглавлен «Счет геометрического разума радиксом сии речь корени осьмоугольного». Подробно описана итерационная методика, авторы не приводят практических задач для ее использования[16].

Определение расстояния между двумя пунктами по известным расстояниям от третьего пункта

В рукописи приведены четыре однотипных задачи: «Ходил до некоего места, вымерил 8 сажен, да опять с того места на иное пошел, вымерил 6 сажен <...> И ты скажи что будет в немеряном месте меры?» Задача сопровождается чертежом (рис. 8).

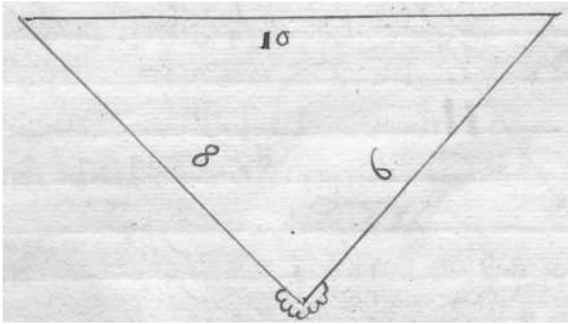

Рис. 8. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 25

Для вычисления неизвестной стороны треугольника авторы пользуются теоремой Пифагора. Предлагается разделить «радиксом» (извлечь квадратный корень) из суммы квадратов длин меньших сторон треугольника. Для приведенного чертежа:

$$\sqrt{8^2+6^2}=10\,.$$

В случае, когда измерена большая сторона треугольника, корень извлекают из разности квадратов большей и меньшей стороны. Теорема Пифагора в рукописи не сформулирована, писцу неизвестно, что она применима только для прямоугольных треугольников. Маловероятно, что на местности можно было определить, какая сторона является гипотенузой, а какая катетом[17].

Измерение расстояния до удаленного объекта

В рукописи описана следующая методика: предлагается изготовить два «батожка» (столбика) высотой в 1 аршин и в 1,5 аршина. Длинный батожок должен иметь «дырку», через которую нужно нацелиться на короткий батожок, и на мишень, «как стреляют из пищали в утку <...> до места до которого хочешь меру знать». Потом батожки переставляются на другое место, и операция повторяется. Положение батожков фиксируется на бумаге в виде чертежа (рис. 9). Расстояние до искомой точки вычисляют исходя из подобия образованных треугольников[18]. Для представленного примера:

$$L=\frac{12\times 13}{3}=52 \text{ аршина.}$$

Перед нами вариант задачи измерения расстояния, решенной Героном Александрийским в трактате «О диоптре». Трактат, созданный в I в. нашей эры, до настоящего времени не опубликован в русском переводе. Герон решил задачу на основе подобия треугольников ВДА и ВЕГ (рис. 10).

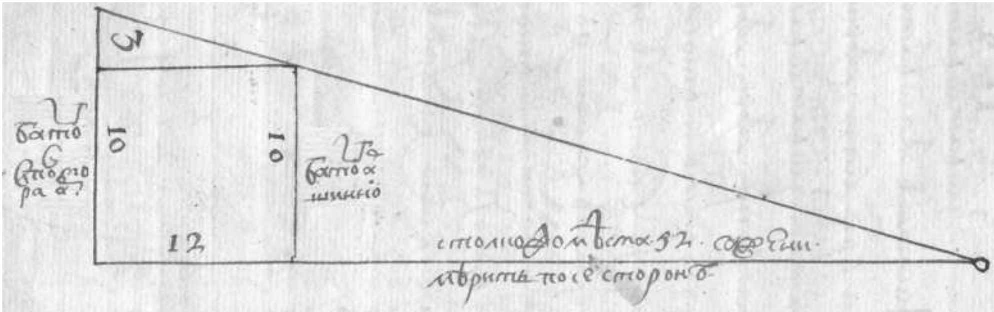

Рис. 9. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 27

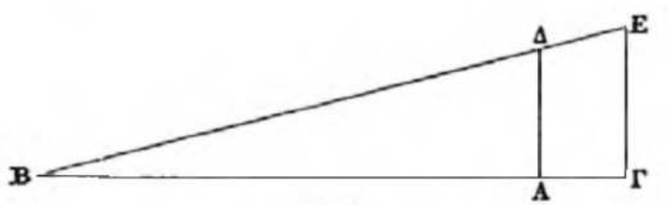

Рис. 10. Рисунок из книги: Heronis Alexandrini. Opera quae supersant omnia. Vol. III. Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica. Stutgardiae [Stuttgart], 1976. P. 220

Герон использовал прототип теодолита, названый диоптрой (рис. 11). Диоптра представляла собой две вертикальные пластинки, закрепленные на вращающемся основании. Пластинка с маленьким отверстием называлась глазным диоптром. Противоположная пластинка, названная предметным диоптром, имела мушку или закрепленный в отверстии волос. Прибор позволял фиксировать направление на объект, а при наличии шкалы измерять угловые величины. Герон, решая задачу измерения расстояния, устанавливал диоптру в точки А, Г, Е, и указывал, что для построения подобных треугольников необходимо соблюсти параллельность отрезков АД и ГЕ[19].

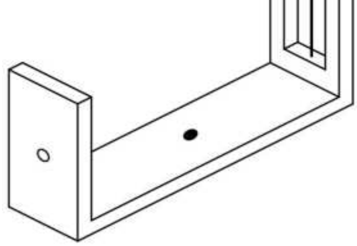

Рис. 11. Диоптра. Современная реконструкция

Авторы руководства по геометрии упростили изобретение Герона. В качестве глазного диоптра использовался «батожок» с отверстием, мушку предметного диоптра заменял другой «батожок». Расстояние между глазным диоптром и мушкой в задаче составляет 10 аршин, это позволяет навести систему на объект с большой точностью. Недостатком решения является то, что авторы не обращают внимания на параллельность сторон полученных треугольников. Невыполнение этого требования может привести к нарушению правила подобия треугольников.

Задачи вычисления длины окружности и площади круга

На рис. 12 изображен круг диаметром 16. Автор пишет: «Сие изображение круга учит, буде кто скажет поперег среди круга меру сколько сажен, и вопросит что будет ево кругом сажен?»[20]

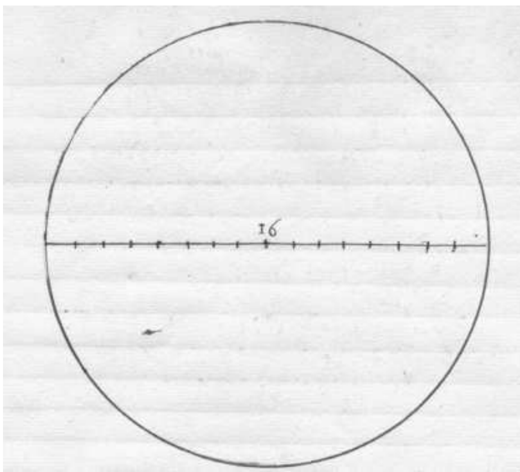

Рис. 12. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 44 об.

Задачу предлагается решать по правилу «тройной статьи»: «купил бутто 7 дал 22, что даст 16?» Получившуюся пропорцию авторы рассчитывают следующим образом:

$$\frac{22}{7}\times 16 = 50\frac{2}{7}\,.$$

В приведенном выражении для получения длины окружности диаметр был умножен на $^{22}/_{7}$. Это не что иное, как значение числа π, которое использовал Пифагор. Аналогичная задача была решена в трактате «Geometria Culmensis», написанном в Пруссии на рубеже XIV–XV вв.[21]

В следующей задаче писец вычисляет площадь круга с диаметром 8. «Ис того поперечника вычти восьмую часть, и что потом останется, то стало того круга четвероугольная стена, и ты сторону стороной умнож, и что по умножении будет, столько в том кругу дробных сажен». Решение задачи можно записать следующим выражением:

$$\left(8\times\frac{7}{8}\right)\times\left(8\times\frac{7}{8}\right)=\frac{49}{16}\times\frac{8^2}{4}=49.$$

Автор рукописи получил площадь круга 49 саженей^2. Сравнивая выражение с формулой площади круга, отмечаем, что в этой задаче π=3,0625.

$$\frac{49}{16}\times\frac{8^2}{4}=\frac{\pi d^2}{4};\ \pi=\frac{49}{16}=3{,}0625.$$

Различные варианты приведенных задач встречаются в рукописях XVII в. Ниже мы переходим к рассмотрению задач уникальных для русских рукописей.

Построение фигур с помощью циркуля

Несколько страниц руководства писец посвящает упражнениям с циркулем. Чертежи далеки от совершенства, не все построения сопровождаются пояснениями[22].

На рис. 13 представлены два чертежа, сопровождающих задачу построения окружности, равной по величине заданному квадрату. Автор рукописи пользуется правилом, по которому диаметр равновеликой окружности равен $^4/_5$ диагонали квадрата. На рисунке слева чертеж, сопровождающий задачу. Логика в построении отсутствует, окружности имеют произвольные размеры. Это становится очевидным для писца, он дополняет задачу простой схемой (рис. 13, справа).

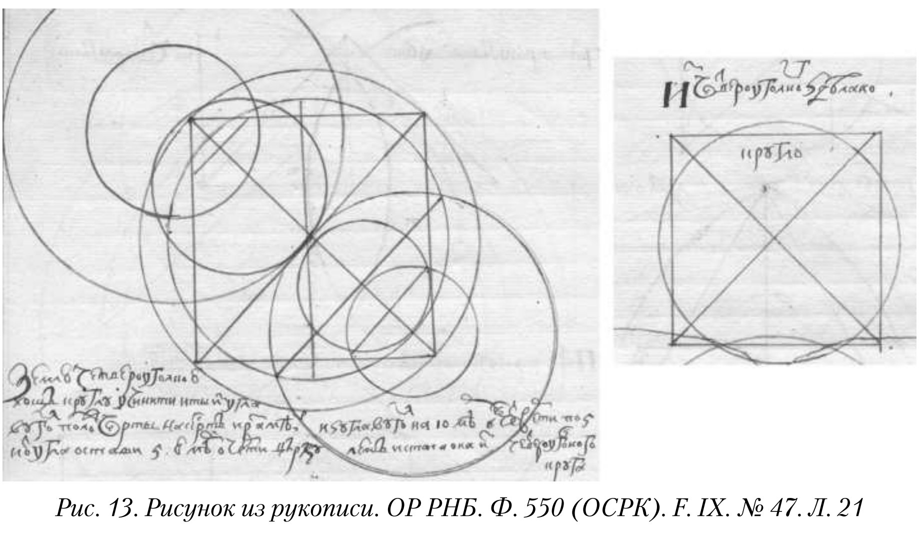

Рис. 13. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 21

Соотнеся формулу площади круга, которой пользовался писец, с формулой площади квадрата (через диагональ), отмечаем, что в данном случае использовалось значение $\pi = 3{,}125$.

$$\frac{\pi \times (0{,}8d)^2}{4} = \frac{d^2}{2} \rightarrow \pi = \frac{d^2}{2} \times \frac{4}{(0{,}8d)^2} = 3{,}125.$$

Два чертежа иллюстрируют построение квадрата равновеликого треугольнику (рис. 14, 15). В первом случае преобразование равнобедренного прямоугольного треугольника в квадрат не вызывает сомнений, за исключением того, что писец неточно скопировал чертеж из протографа. Точка пересечения окружностей с радиусами, равными сторонам треугольника, должна указывать положение вершины треугольника.

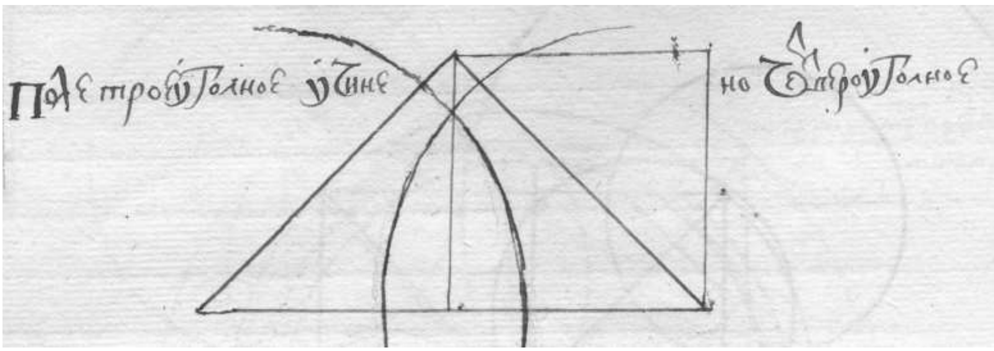

Рис. 14. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 21 об.

Следующий чертеж неубедителен (рис. 15). Остается неясным, каким образом треугольник преобразован в квадрат, равновеликость фигур вызывает сомнение.

Рис. 15. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 21 об.

Несколько чертежей посвящено преобразованию длинных полей в треугольные и далее в квадратные (рис. 16). Преобразование равнобедренного треугольника в квадрат проведено так же, как на рис. 14. Относительно «длинных полей» чертеж не дает представления об их реальной форме и размерах. Каким образом проведено преобразование, непонятно.

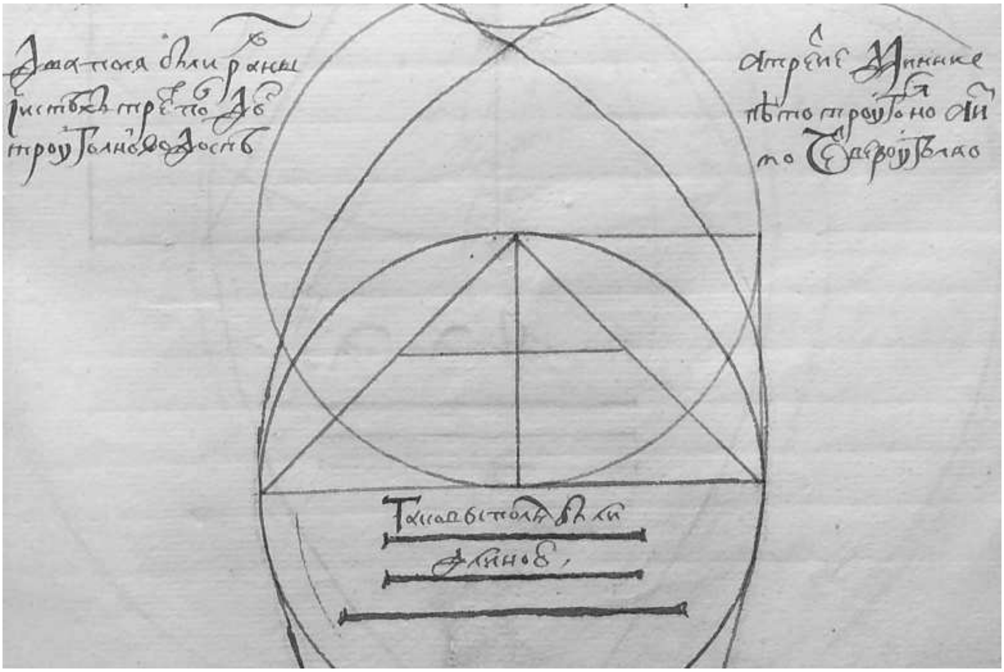

Рис. 16. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 21

На рис. 17 показано преобразование трапеции в равновеликий прямоугольник. Построение можно признать правильным, если убрать многочисленные окружности, которые ничем не помогли автору чертежа.

Задача вычисления высоты треугольника

Она сформулирована следующим образом: «Как бы стояло два дерева, дерево 6 сажен, другое 8 сажен, а меж ними 10 сажен. Как они повалились, дерево на дерево концами, что от земли они будут высотою?»

Показано два способа решения. Первый вариант предполагает построение фигуры в масштабе (рис. 18). Для этого автор на чертеже изображает отрезок длиной 10 «мер». Далее необходимо построить две дуги радиусами 6 и 8 мер

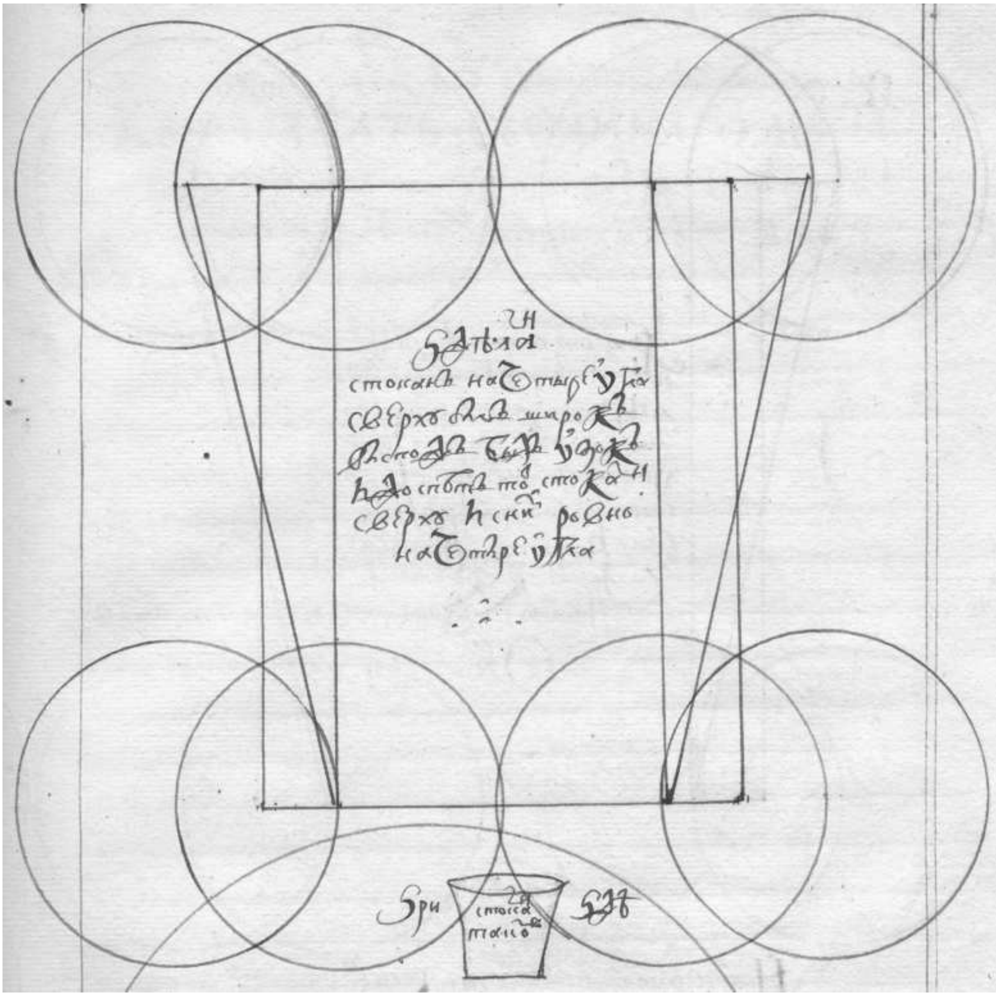

Рис. 17. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 23

с центрами в концах отрезка. Точка пересечения дуг определяет положение вершины искомого треугольника. В рукописи подробно описано построение, однако на чертеже заметны несоответствия: фигура построена без использования циркуля, отметки на вертикальных осях не отвечают величинам сторон треугольника, дерево высотой 6 саженей оказывается выше дерева высотой 8 саженей. Измерение высоты треугольника произведено неточно, указано значение 4¾ сажени. Писец скопировал задачу слово в слово, но не смог разобраться в построении чертежа. Рисунок срисован без использования чертежных инструментов.

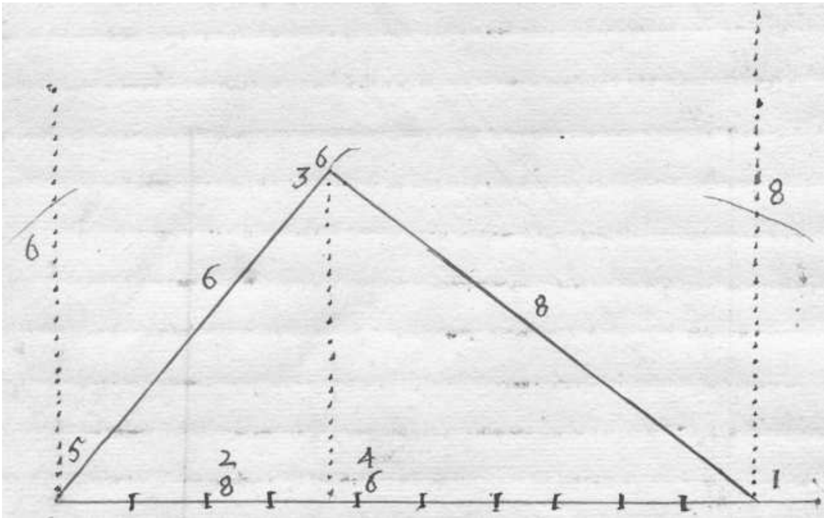

Рис. 18. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 47 об.

Вторая методика состоит в делении произведения боковых сторон на величину основания треугольника:

$$\frac{6\times 8}{10} = 4{,}8 \text{ сажени.}$$

Решение соответствует теореме о высоте прямоугольного треугольника, которым является треугольник, представленный на чертеже. Различие результатов не вызывает удивления у писца[23].

Задача вычисления площади треугольника

На рис. 19 автор изобразил треугольник со сторонами 13, 14, 15 саженей.

Предлагается следующая методика вычисления площади. Сначала вычисляется периметр фигуры:

$$13+14+15=42.$$

Затем половина периметра:

$$42/2=21.$$

Далее автор поочередно вычисляет разности полупериметра и каждой из сторон:

$$21-13=8;\ 21-14=7;\ 21-15=6.$$

После этого произведение полученных величин умножается на полупериметр:

$$7\times 6\times 8\times 21=7056$$

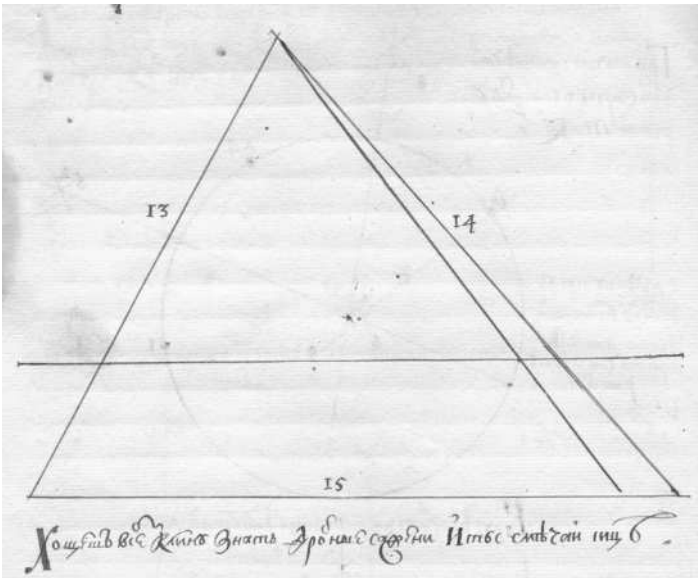

Рис. 19. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 46 об.

Площадь фигуры вычисляется как квадратный корень из 7056:

$$\sqrt{7056} = 84 \text{ сажени}^2.$$

Перед нами не что иное, как фрагмент трактата Герона Александрийского «О диоптре»[24]. Формула расчета площади треугольника по трем сторонам получила название формулы Герона. В настоящее время формула Герона записывается следующим образом:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника.

Для приведенного выше треугольника:

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84 \text{ сажени}^2.$$

Автор рукописи не ограничивается одной методикой вычисления площади и предлагает еще один способ — умножить полусумму коротких сторон треугольника на половину основания:

$$\frac{13+14}{2} \times \frac{15}{2} = 104\frac{1}{4} \text{ сажени}^2.$$

Вычисление проведено неправильно, правильное произведение — 101 ¼ сажени². Очевидно, что вторая формула не позволяет корректно вычислить площадь. Автор в этом не уверен, он оставляет вопрос открытым: «Из сих двух образцов которой правда, изверить треба чертежами»[25].

Измерение расстояний с использованием геометрического квадрата

На последних страницах рукописи представлены способы определения расстояний на местности при помощи неназванного геодезического прибора (рис. 20). К. И. Швецов ошибочно отождествил этот прибор с квадрантом[26]. На самом деле при решении использован геометрический квадрат (Quadratum Geometricum). Прибор применялся в Европе для геодезических измерений в XV–XVI вв. В отличие от квадранта, геометрический квадрат не позволял измерять угловые величины.

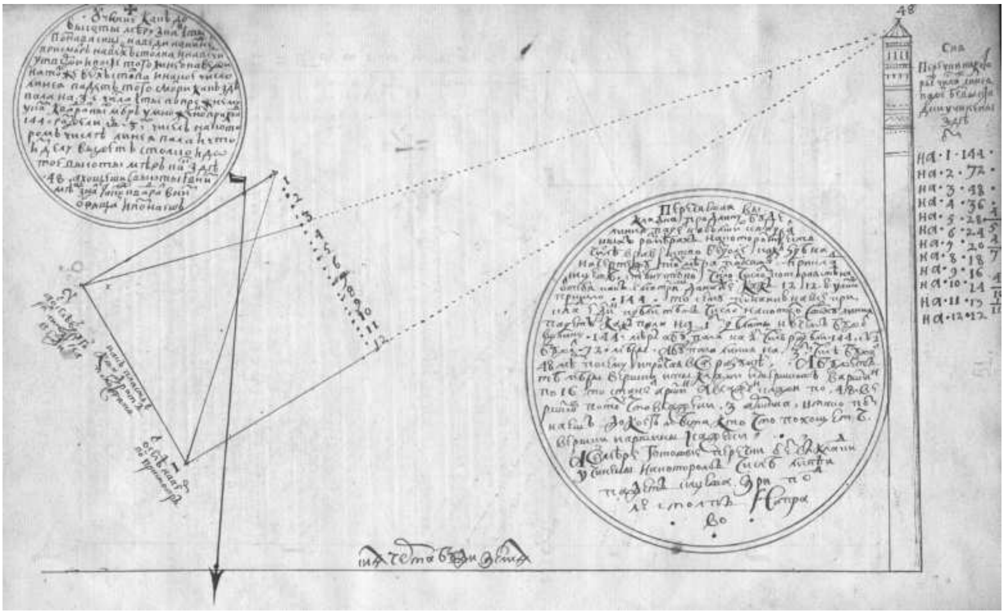

Рис. 20. Измерение расстояния до вершины башни при помощи геометрического квадрата. Страница из руководства. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 51

Геометрический квадрат был впервые описан Георгом Пойербахом[27]. Прибор представлял из себя квадратную рамку, снабженную отвесом. Две стороны рамки имели деления, к противолежащему углу квадрата прикреплялась линейка, снабженная диоптром (рис. 21). Измерение проводилось следующим образом: основание квадрата закрепляли в горизонтальной плоскости, диоптр наводили на удаленный объект. Линейка диоптра фиксировала размер треугольника, подобного треугольнику на местности. Расстояние до объекта вычисляли по теореме подобия треугольников. Георг Пойербах в своем трактате привел таблицу расстояний, которые соответствовали делениям прибора. Задача вычисления расстояния до вершины башни была опубликована немецким механиком и астрономом Петером Апианом в 1533 г.[28] (рис. 21).

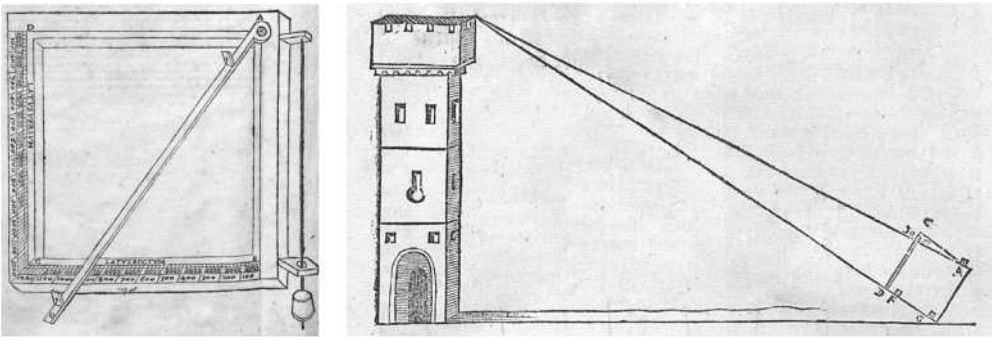

Рис. 21. Геометрический квадрат и измерение высоты с его помощью. На рисунке слева: геометрический квадрат. Georg von Peuerbach (Georgij Burbachij). Quadratum goemetricum meridiano. Nuremberg, 1516. Справа: Измерение расстояния до вершины башни. Petrum Apianum. Instrument Buch. Ingolstadt, 1533

В конце раздела о геометрическом квадрате писец решает задачу измерения расстояния между двумя удаленными объектами (рис. 22). В русских учебниках по арифметике задачи этого типа не имели корректного решения, так как писцы не придавали значения величине углов треугольника.

Для измерения расстояния между двумя удаленными деревнями автор предлагает положить геометрический квадрат горизонтально «пластью» и измерить расстояние до одной и другой деревни по методике, изложенной выше. Далее автор фиксирует угол, наводя основание квадрата на первую деревню, а линейку с диоптром — на вторую. Полученные треугольники не являются подобными. Писец не располагает математическим аппаратом для решения задачи. Задача решена методом построения масштабной модели. На основании квадрата автор отложил в масштабе расстояние до первой деревни, на подвижной линейке — расстояние до второй деревни. После этого расстояние между искомыми точками измерено в масштабе при помощи циркуля и линейки[29].

Некоторые чертежи в рукописи не имеют описания. На рис. 23 представлен чертеж с латинскими обозначениями, содержащий вычисления, но лишенный каких-либо комментариев[30].

Познакомившись выше с использованием геометрического квадрата, мы понимаем, что на чертеже изображен еще один способ применения этого прибора, скопированный из иностранного источника. Геометрический квадрат не имел распространения в России, в других русских рукописях этот прибор не упоминается.

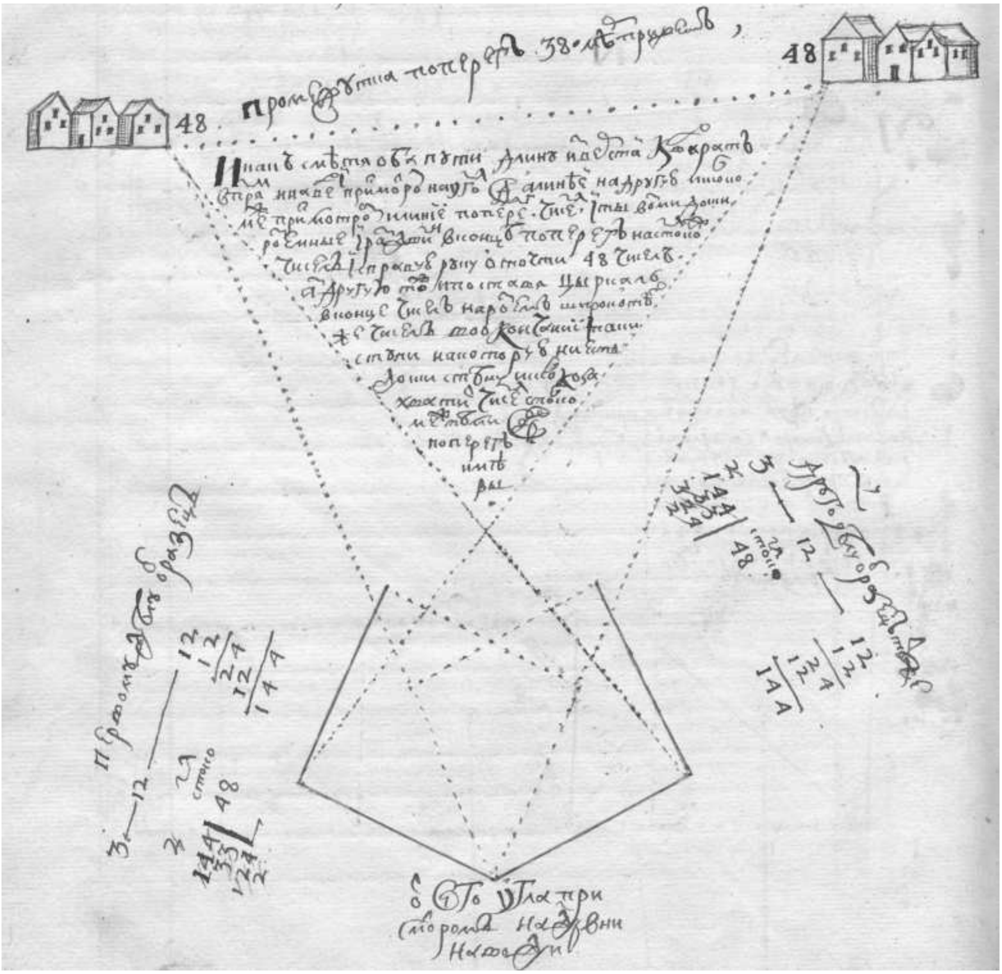

Рис. 22. Измерение расстояния между удаленными объектами при помощи геометрического квадрата. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 53 об.

Рассмотренное руководство по геометрии и землемерию было создано на рубеже XVII–XVIII вв., автор текста не был знаком с европейскими учебниками, изданными в России в 1708–1725 гг.[31] Рукопись является наиболее полным сводом задач по практической геометрии на русском языке. Значительная часть задач редко встречается в источниках XVII в. Вычисление площади треугольника по формуле Герона и описание измерений с помощью геометрического квадрата уникальны для русских рукописей. Составитель рукописи пользовался представительным книжным собранием, в которое, наряду с книгами сошного письма и работами по арифметике, входили тру-

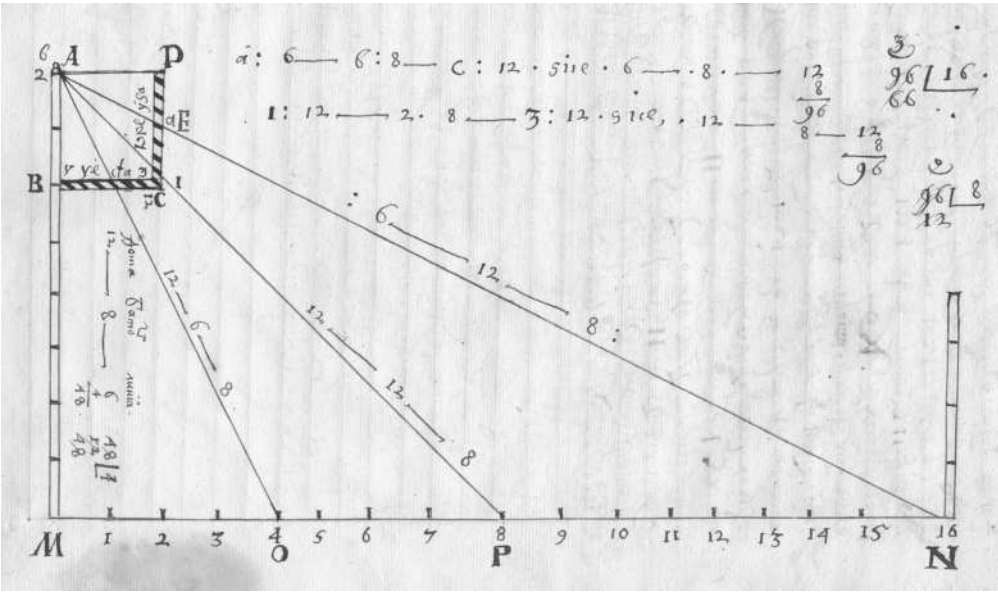

Рис. 23. Рисунок из рукописи. ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 48 об.

ды немецких и австрийских астрономов XVI в. и трактаты древнегреческих математиков.

Как и большинство древних учебников, руководство имеет догматический характер. Для каждой задачи предлагается метод решения, которому надлежит следовать. Точность вычислений не являлась приоритетом. В большинстве задач используются эмпирические правила, дающие приблизительные результаты. Для некоторых задач предлагается несколько решений, приводящих к разным результатам. Авторы не считали нужным выяснить, какой из результатов верный. Например, задача квадратуры круга решалась с использованием числа π=3; 3,0625; 3,125; $^{22}/_{7}$ и др.

Текст показывает, что землемерие XVII в. не учитывало основополагающие понятия геометрии. Землемерам не были известны квадрант и астролябия, применявшиеся в мореплавании и артиллерии. Отсутствие сведений о величинах углов являлось причиной ошибок при вычислении площадей земельных участков. Несоблюдение признаков параллельности прямых приводило к нарушению подобия треугольников при измерении расстояний. Изучение руководства по геометрии подтверждает ранее высказанное мнение о том, что писцы-межевщики не были знакомы с правилами геометрии Евклида. Методики вычисления площадей земельных участков, которыми располагали землемеры в XVII в., не давали точных результатов.

[1] *Карамзин Н. М.* 1) История государства Российского. СПб., 1843. Кн. 3. Т. X. С. 148; 2) Примечания к Истории государства Российского. Примечания к X тому Истории государства Российского. СПб., 1853. С. 128.
[2] ОР РГБ Ф. 194. № 32. С. 110 – 176 об.; Ф. 310. № 682. С. 111 об. – 168 об.; ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. 55 л.
[3] *Бобынин В. В.* Геометрия в России в XVII столетии // Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем. Т. 2. № 3. М., 1887. С. 212, 226–237, 295–304.
[4] История отечественной математики. Т. 1. С древнейших времен до конца XVII в. Киев, 1966. С. 132–139; *Юшкевич А. П.* История математики в России до 1917 года. М., 1968. С. 42–46.
[5] ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47.
[6] Ратманов Андриан Григорьевич – подьячий Поместного приказа, 1686–1687 гг.; с июля 1693 по сентябрь 1712 г. дьяк того же приказа; в 1704 г. прибирал служилых людей в Тюмени. См.: *Веселовский С. Б.* Дьяки и подьячие XV–XVII вв. М., 1975. С. 447.
[7] *Дианова Т. В., Костюхина Л. М.* Филиграни XVII века по рукописным источникам ГИМ. М., 1988.
[8] ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 2.
[9] Там же. Q. IX. № 3. Л. 162 об. – 165 об.; Q. IX. № 53. Л. 30 об. – 33; ОР РГБ. Ф. 310. № 826. Л. 268 об. – 269 об.; № 834. Л. 28–34; Ф. 178. № 932. Л. 221 об. – 225 об. и др.
[10] ОР БАН (Основное собрание). 17.6.24. Л. 167–171.
[11] ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 13–19; См. например: ОР РГБ. Ф. 178. № 932. Л. 226 об. – 231 об.; № 982. Л. 185 – 189 об., 219–221; ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). Q. IX. № 13. Л. 117–121; Q. IX. № 14. Л. 231–236.
[12] ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 13–20.
[13] Основание – в математике: число, возводимое в степень.
[14] *Зверкина Г. А.* Метод простой итерации от Вавилона до Ньютона // Историко-математические исследования. Вып. 3 (38). М., 1999. С. 270–315; *Georgio Peurbachio*. Arithmetices elementa: Algorithmus de numeris integris. Francofurtiex [Frankfurt], 1544.
[15] ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 2 – 7 об.
[16] Там же. Л. 10 об. – 12 об.
[17] Там же. Л. 24 – 25 об.
[18] Там же. Л. 26 – 27 об.
[19] *Heronis Alexandrini*. Opera quae supersant omnia. Vol. III. Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica. Stutgardiae [Stuttgart], 1976. P. 192, 193, 220, 221.
[20] ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 44 об., 45.
[21] Geometria Culmensis: Ein Agronomischer Tractat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen, 1393–1407. Leipzig, 1886. P. 67–68.
[22] ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 20 – 23 об.
[23] Там же. Л. 47 об.
[24] *Heronis Alexandrini*. Opera quae supersant omnia. Vol. III. P. 285.
[25] ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 46 об.
[26] История отечественной математики. Т. 1. С древнейших времен до конца XVII в. Киев, 1966. С. 138.
[27] *Georg von Peuerbach*. Quadratum goemetricum meridiano. Nuremberg, 1516.
[28] *Petrum Apianum*. Instrument Buch. Ingolstadt, 1533.
[29] ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47. Л. 50 об. – 54.
[30] Там же. Л. 48 об.
[31] *Буркхард фон Пюркенштейн А. Э.* Геометриа славенски землемерие / Пер. Я. В. Брюса. М., 1708; О превращении фигур плоских в иныя такова же содержания / Сост. Я. В. Брюс. М., 1708; *Буркхард фон Пюркенштейн А. Э.* Приемы циркуля и линейки, или Избраннейшее начало в математических искусствах, им же возможно легким и новым способом вскоре доступити землемерия и иных из онаго происходящих искуств. М., 1709; То же: СПб., 1725.

References

BOBYNIN V. V. *Geometriya v Rossii v XVII stoletii* [Geometry in Russia in the 17th century. In Russ.] // Fiziko-matematicheskie nauki v ih nastoyashchem i proshedshem. Vol. 2. No. 3. Moscow, 1887.

BURKKHARD FON PYURKENSHTEJN A. E. *Geometria slavenski zemlemerie*. [Geometry according to Slavic land surveying. In Russ.]. Per. YA. V. Bryusa. Moscow, 1708.

BURKKHARD FON PYURKENSHTEJN A. E. *Priemy cirkulya i linejki ili izbrannejshee nachalo v matematicheskih iskusstvah, im zhe vozmozhno legkim i novym sposobom vskore dostupiti zemlemeriya i inyh iz onago proiskhodyashchih iskustv*. [Methods of compasses and rulers or the most chosen beginning in the mathematical arts, and an easy and new way of surveying and other of the arising arts. In Russ.]. Moscow, 1709.

DIANOVA T. V., KOSTYUHINA L. M. *Filigrani XVII veka po rukopisnym istochnikam GIM*. [Filigree of the 17th century according to manuscript sources from the State Historical Museum. In Russ.]. Moscow, 1988.

Geometria Culmensis: Ein Agronomischer Tractat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen, 1393–1407. Leipzig, 1886.

GEORG VON PEUERBACH. Quadratum goemetricum meridiano. Nuremberg, 1516.

GEORGIO PEURBACHIO. Arithmetices elementa: Algorithmus de numeris integris. Francofurtiex [Frankfurt], 1544.

HERONIS ALEXANDRINI. Opera quae supersant omnia. Vol. III. Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica. Stutgardiae [Stuttgart], 1976.

Istoriya otechestvennoj matematiki. [History of Russian mathematics. In Russ.]. T. 1. S drevnejshih vremen do konca XVII v. Kiev, 1966.

KARAMZIN N. M. *Istoriya gosudarstva Rossijskogo*. [History of the Russian State. In Russ.]. St. Petersburg, 1843. Book 3. Vol. X.

KARAMZIN N. M. *Primechaniya k Istorii gosudarstva Rossijskogo* [Notes to the History of the Russian State. In Russ.] Primechaniya k X tomu Istorii gosudarstva Rossijskogo. St. Petersburg, 1853.

O prevrashchenii figur ploskih v inyya takova zhe soderzhaniya. [About the transformation of flat figures into others of the same content. In Russ.]. Compiled by YA. V. Bryus. Moscow, 1708.

PETRUM APIANUM. Instrument Buch. Ingolstadt, 1533.

VESELOVSKIJ S. B. *D'yaki i pod'yachie XV–XVII vv*. [Clerks and clerks of the 15th–17th centuries. In Russ.]. Moscow, 1975.

YUSHKEVICH A. P. *Istoriya matematiki v Rossii do 1917 goda*. [The history of mathematics in Russia before 1917. In Russ.]. Moscow, 1968.

ZVERKINA G. A. *Metod prostoj iteracii ot Vavilona do N'yutona* [The method of simple iteration from Babylon to Newton. In Russ.] // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. Vyp. 3 (38). Moscow, 1999.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ

А. Г. Гуменюк. Методы землемерия в геометрической рукописи XVII в. // Петербургский исторический журнал. 2022. № 1. С. 20–42

Аннотация: В статье рассмотрено руководство по геометрии и землемерию, составленное в конце XVII в. (ОР РНБ. Ф. 550 (ОСРК). F. IX. № 47). Составители рукописи наряду с учебниками по арифметике и книгами сошного письма использовали трактаты немецких и австрийских астрономов. Автор показал, что в землемерии не применялись угломерные инструменты, известные в архитектуре и мореплавании. Писцы не располагали методикой точного расчета площадей земельных участков.

***Ключевые слова**:* История геометрии и землемерия, писцовые книги, десятина, четверть, древняя русская метрология, дьяк Андриян Ратманов, XVII в.

FOR CITATION

A. G. Gumenyuk. Land surveying methods in the manuscript of the 17th century // Petersburg Historical Journal, no. 1, 2022, pp. 20–42

Abstract: The article discusses a textbook by geometry and surveying compiled at the end of the 17th century (OR RNB. F. 550 (OSRK). F. IX. No. 47). The compilers of the manuscript used textbooks of arithmetic, books of the *soshny* writing, and treatises of German and Austrian astronomers. It is shown that goniometric instruments, known in architecture and navigation fields, were not used in land surveying. The scribes did not have a method for accurately calculating the area of land plots.

Key words: History of geometry and land surveying, cadastres, dessiatina, quarter, ancient Russian Metrology, 17th century.

Автор: **Гуменюк, Алексей Геннадьевич** — исследователь, Ярославское историко-родословное общество.

Author: **Gumenyuk, Alexey Gennadievigh** — Researcher, Yaroslavl Historical and Genealogical Society.

E-mail: al.gumenyuk@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3057-4120